

**問題** 「第1節三角関数」までの範囲（第2節加法定理、三角関数の合成を除く範囲）で、自分で問題を作成し、解きなさい。ただし、答案はペアで交換し、下のループリックをもとに採点するものとする。  
【ループリック】

|      | S                                                             | A                                               | B                                              | C                                                                             |
|------|---------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| 問題作成 | 複数の公式や知識を組み合わせで解決するような、 <u>難易度が高い</u> 問題を作成できた。<br><b>4 点</b> | 公式を利用して解決するような標準的な難易度の問題を作成できた。<br><b>3 点</b>   | 公式を直接問うような <u>容易な</u> 問題を作成できた。<br><b>2 点</b>  | 問題を作成したが、条件不足などで、 <u>問題として成立していない</u> 。<br>(採点者の考えで3点まで加点してよい。)<br><b>1 点</b> |
| 答案採点 | Sレベル問題に正解できた。(採点者の考えで、減点してよい。)<br><b>6 点満点</b>                | A レベル問題に正解できた。(採点者の考えで、減点してよい。)<br><b>5 点満点</b> | Bレベル問題に正解できた。(採点者の考えで、減点してよい。)<br><b>4 点満点</b> | 問題として成立していない、または、不正解である。<br><b>1 点</b>                                        |

<生徒が作成した主な問題と解答>

### 基礎コース

- $(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta) + \tan \theta = \sin^2 \theta + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$  を証明しなさい。  
→ 普段あまり発言がなく、集中力に欠ける場面も目立つ生徒だが、式が成り立つように試行錯誤しながら、上記の問題を作成した。
- $\sin \theta = 3$  のとき、 $\cos \theta, \tan \theta$  の値を求めよ。  
→  $\cos \theta = -\sqrt{-8}$  から  $\cos \theta = \sqrt{8}$  として計算を進めていた。採点した生徒も、間違いを指摘することができなかった。全体に問いかけたら、何名かすぐに誤りに気づき、 $-1 \leq \sin \theta \leq 1$  であることを確認した。
- $\cos \theta = \frac{3}{4}$  のとき、 $\sin \theta$  と  $\tan \theta$  の値を求めよ。  
→ 問題作成した生徒は、 $\sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$ 、 $\tan \theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$  と解答し、採点した生徒に○をもらっていた。同じような問題を作成した生徒で、「 $\theta$  の動径が第何象限にあり」と記載がある生徒から、 $\theta$  の動径が、第4象限にもあることを指摘されていた。
- $\sin \frac{2}{3}$  のとき、 $\cos \theta$  と  $\tan \theta$  の値を求めよ。  
→  $\theta = \frac{2}{3}$  と  $\theta = \frac{2}{3}\pi$  と  $\sin \theta = \frac{2}{3}$  の違いを説明させた。
- 次の  $y = \sin \theta$  のグラフで、①～⑤の値を求めよ。また、周期を求めよ。※グラフ省略

### 標準コース

- $\{(\sin 45^\circ + \cos^2 \theta + 387 + \sin 30^\circ + \sin^2 \theta - \tan^2 \theta \times \cos^2 \theta) \div 1227\sqrt{2}\} \times 32$  を計算しなさい。  
→ 採点した生徒は当初、問題を作成した生徒に満点を与えていたが、数値が複雑になっているだけだと、判断し、得点を減点していた。
- $\sin \theta = \frac{4}{9}$ 、 $\cos \theta = \frac{7}{9}$  のとき  $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}$  の値を求めよ。  
→ 問題が、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  となっていないため、解くことができず、困っていた。

•  $\frac{\cos\theta-1}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta-1} = -\frac{2}{\sin\theta}$  を証明しなさい

• 次の等式を証明せよ。  $\frac{\sin^2\theta}{\tan^2\theta-\sin^2\theta} = \frac{1}{\tan^2\theta}$

→ 途中式を間違えているが、採点した生徒も気がついていなかった。

•  $\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \sin^2\theta$  を証明してください！

→  $\sin^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$  として問題を作成しており、採点した生徒に間違いを指摘されていた。

•  $\theta$  の動径が第2象限にあり、 $\cos\theta = \frac{4}{13}$  のとき  $\sin\theta$  の値を求めよ。

→  $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$  より  $\sin^2\theta + \frac{4}{13} = 1$   $\sin^2\theta = \frac{9}{13} = \frac{3}{\sqrt{13}}$  との記載で採点した生徒は正答とした。

•  $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$  とする。  $\sin\theta \cos\theta = \frac{1}{5}$  のとき、次の値を求めよ。(1)  $\sin\theta + \cos\theta$  (2)  $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$

→ (1) は  $\sin\theta < 0$ 、 $\cos\theta < 0$  であるから  $\sin\theta + \cos\theta < 0$  となることを示し、 $\sin\theta + \cos\theta = -\frac{\sqrt{35}}{5}$  を導いていた。(2) は  $(\sin\theta - \cos\theta)^2 = \frac{3}{5}$  から  $\sin\theta - \cos\theta = -\frac{\sqrt{15}}{5}$  として連立方程式を立てていた。 $\sin\theta - \cos\theta = \frac{\sqrt{15}}{5}$  となることがありうると、自分たちで気がつくことはできなかったが、議論のよい材料とすることができた。

•  $\frac{\sin^2\theta-1}{\cos^2\theta} + (\sin\theta + \cos\theta)^2 = \frac{1}{2}$  のとき、 $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$  の値を求めよ。

→ 左辺  $= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \frac{1}{\cos^2\theta} + \sin^2\theta + \sin\theta \cos\theta + \cos^2\theta = \tan^2\theta + 1 - \frac{1}{\cos^2\theta} + \sin\theta \cos\theta = \sin\theta \cos\theta$  としてしまった。 $\sin\theta \cos\theta = \frac{1}{2}$  としたあと、 $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 、 $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$  または  $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$   $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  と答えていた。採点した生徒は、○を与えていた。

• 次の関数の周期を求め、そのグラフをかけ。  $y = 3\sin(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{3}) + 1$

•  $\sin\frac{5}{4}\pi + \cos\frac{7}{2}\pi + \sin\frac{5}{2}\pi + \cos\frac{11}{4}\pi$  の値を求めなさい。

• 半径が 12、中心角が  $\frac{\pi}{3}$  であるおうぎ形の弧の長さや面積を求めよ。

•  $\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{2}$  のときの  $\sin\theta \cos\theta$ 、 $\sin^3\theta - \cos^3\theta$  の値を求めよ。

## 応用コース

•  $\frac{1}{\tan^2\theta} + 2\cos\theta = -2$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ) を解け。

→ 問題を作成した生徒は、これを解き、 $\theta = \pi$  としていた。授業で問いかけ、そもそも計算間違いをしているので  $\cos\theta = -1$  とならないこと、 $\tan^2\theta = 0$  とならないことに気が付くことができた。

•  $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 1$  のとき  $1 + \tan\theta + \frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{3}{\tan\theta}$  の値は？

→ 採点した生徒からは、ループリックで B 評価(公式を直接問うような容易な問題)と判断されていた。

• 原点を中心とする半径が  $r$  の円上の点  $P$  が  $(x, y)$  のとき、 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$  であることを証明しなさい。

→  $\sin\theta = \frac{y}{r}$ 、 $\cos\theta = \frac{x}{r}$  としたあと、 $(\frac{y}{r})^2 + (\frac{x}{r})^2 = 1$  の形から証明しており、不正解とされていた。

- (3辺の長さが、3, 4, 8で4と8の間の角を $\theta$ とした三角形を描き)  $\cos \theta$ を求めよ。

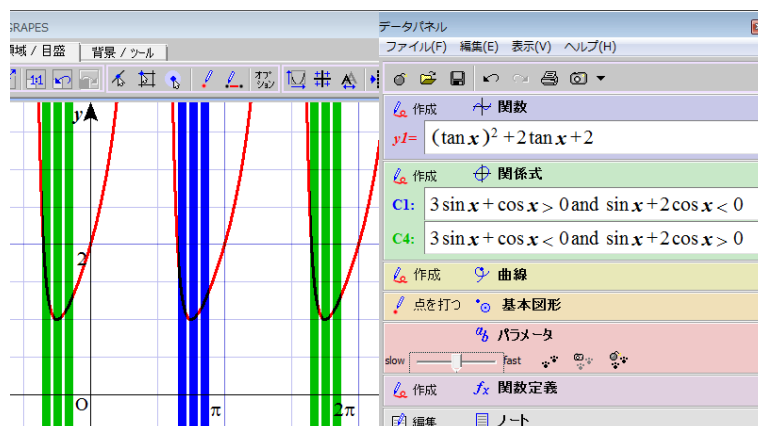
→ 余弦定理を用いていたが、三角形が成立していないことに気がついていなかった。

- $-\pi \leq \theta \leq \pi$  のとき、関数  $2 \left( \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\tan \theta} + \frac{(1 - \sin \theta) \cos \theta}{\sin \theta} \right) = \frac{y}{\sin \theta}$  の値を求めてください。お願いします。

→ 問題を作成した生徒は、 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$  として、 $\cos \theta$  の式にしていたのだが、採点した生徒は、難しく感じて無理と、採点することができなかった。

- $(3 \sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta + 2 \cos \theta) < 0$  のとき、 $f(x) = \tan^2 \theta + 2 \tan \theta + 2$  の最大値と最小値を求めなさい。

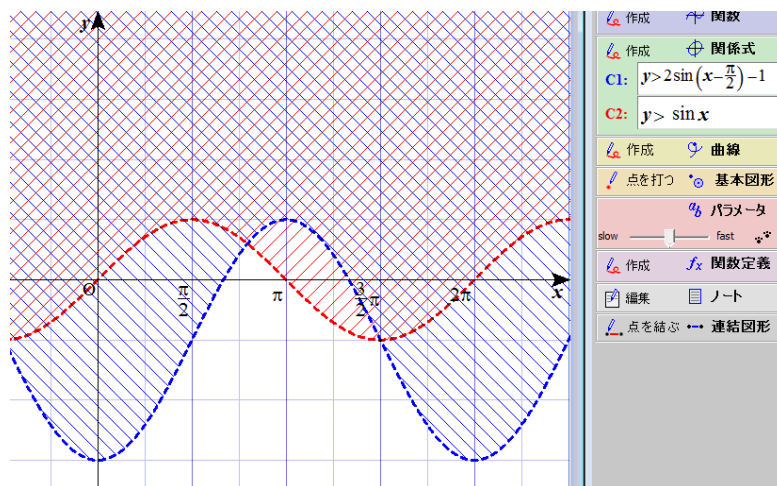
→  $3 \sin \theta + \cos \theta > 0$  かつ  $\sin \theta + 2 \cos \theta < 0$  または  $3 \sin \theta + \cos \theta < 0$  かつ  $\sin \theta + 2 \cos \theta > 0$  となることまでは導いていた。授業時間では、検討できなかった。フリーソフトの grapes を用いて、グラフを示した。※右図



- 次の連立不等式の領域を図示せよ。

$$\begin{cases} y > 2 \sin \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) - 1 & \cdots \textcircled{1} \\ y > \sin \theta & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

→ 問題を作成した生徒は、②のグラフをかいたあと、時間内に①のグラフをかきことができなかった。採点した生徒は、この生徒の問題作成をC評価(問題として成立していない)と考えていたが、右の図のように提示すると、納得していた。



- $\sin \theta > 0$ 、 $\cos \theta > 0$  であるとき、 $\sin \theta + \cos \theta + \tan \theta = 0$  から  $\sin^2 \theta + \cos^3 \theta = 0$  を導け

→ 動径が第1象限にあるから  $\tan \theta < 0$  とならないので、そもそも問題として成り立っていないと指摘されていた。

- $\tan^2 \theta \times \frac{1}{\cos^2 \theta} \times \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \times \sin^2 \theta \cos^2 \theta = 2$  を証明せよ。ただし、 $\sin^2 \theta \cos^2 \theta = 2$  とする。

→ 採点した生徒も、そもそも  $\sin^2 \theta \cos^2 \theta = 2$  とならないことに気が付くことができなかった。

- $(2 + \sin \theta + \cos \theta)^2 + (2 - \sin \theta + \cos \theta)^2 + 2 \cos \theta = 10(1 + \cos \theta)$  を証明せよ。

→ 採点をした生徒が計算ミスをしてしまったが、問題作成をした生徒と交流することができた。プリントの余白に、楽しかったとのコメントがあった。

- $y = 2 \sin(2\theta + \pi)$  のグラフをかけ。また、そのグラフを y 軸方向に -2、 $\theta$  軸方向に  $\frac{\pi}{4}$  平行移動した式を求め、グラフもかけ。

→  $y = 2 \sin 2 \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right)$  のグラフをかき、 $y = 2 \sin 2 \left( \theta + \frac{\pi}{4} \right) - 2$  との式を示した。

- 関数  $y = -\sin \theta + 4$ ,  $y = 3 \sin \left( 2\theta + \frac{\pi}{5} \right)$  のグラフを書きなさい。

- $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{4}$  のときの  $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$  の値を求めてください。

『 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{3}{2}$ のとき $\sin\theta\cos\theta$ の値を求めよ。』

この問題に、加藤くんは、右のように解答した。

この解き方は、正しいか？

誤っている場合は、誤りを指摘しなさい。

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\cos\theta - \frac{1}{2}\right)^2 \\
 &= \sin^2\theta + \cos^2\theta - (\sin\theta + \cos\theta) + \frac{1}{2} \\
 &= 1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 0 \\
 &\text{よって、}\sin\theta = \frac{1}{2}, \cos\theta = \frac{1}{2} \\
 &\text{したがって、}\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4} \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

○生徒がワークシートに記述した主な内容

•  $\sin\theta + \cos\theta = \frac{3}{2}$ の両辺を2乗して計算すると、 $\sin\theta\cos\theta = \frac{5}{8}$ となる。

•  $\sin\theta + \cos\theta = \frac{3}{2}$ 、なのに $\sin\theta = \frac{1}{2}$ 、 $\cos\theta = \frac{1}{2}$  とはならない。 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$  から、 $\cos\theta = \frac{1}{2}$ だと $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

•  $(\sin\theta - k)^2 + (\cos\theta - k)^2 = 0$ のとき  $\sin\theta = \cos\theta$  となる。よって、 $k = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ にならなければならない。

よってこの計算を導くことは不可能。

•  $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$   $\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}$  より  $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

→この生徒は、 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ が1より大きいことに、自分では気がつくことができなかった。

•  $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$  はMAX 1、min -1  $1.414 \times 3 = 4.2426$   $4.2426 \div 4 = 1.06\cdots$ で矛盾している。

•  $\sin\theta = \frac{3}{2} - \cos\theta$   $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$  から  $\left(\frac{3}{2} - \cos\theta\right)^2 + \cos^2\theta = 1$   $\cos\theta = \frac{3 \pm i}{4}$  ムリじゃね？

•  $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$  から  $2\sin^2\theta - 3\sin\theta + \frac{5}{4} = 0$   $D = 9 - 4 \cdot 2 \cdot \frac{5}{4} < 0$

• (単位円を描いて)  $\sin\theta = \frac{1}{2}$ かつ $\cos\theta = \frac{1}{2}$ となる $\theta$ は、存在しない。

※多くの生徒が、展開をして、0になるかどうかを確認していた。

※発表した生徒の説明を聞き、自分のワークシートに次のように記載していた生徒が多く見られた。

$$\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left( \theta + \frac{\pi}{4} \right) \quad -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin \left( \theta + \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2} \quad \text{より } \sin \theta + \cos \theta \text{ の範囲は、} -1.4 \text{ か}$$

ら 1.4 なので  $\sin \theta + \cos \theta = \frac{3}{2}$  つまり 1.5 になるということがそもそもない。

#### ○生徒に提示したループリックと授業後の生徒の自己評価結果 (%)

|      | S                                    | A                                           | B                                     | C                                 |
|------|--------------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------|
| 主体的  | -                                    | 仲間や教員と意見交換して、理解を深めようとする<br>ことができる。<br>(93%) | 与えられた課題に、自ら進んで取り組むことができる。<br>(7%)     | 与えられた課題に、まったく取り組むことができない。<br>(0%) |
| 対話的  | -                                    | 自ら考えたことを、グループ内で、仲間や教員に説明できる。<br>(84%)       | 仲間や教員と意見交換したり、議論したりすることができる。<br>(16%) | 仲間や教員と意見交換や議論をまったくしない。<br>(0%)    |
| 深い学び | 既習内容を確認し、課題を自らの力で解決することができる。<br>(2%) | 課題を解決するための考え方を理解することができる。<br>(69%)          | 三角関数の性質や加法定理を理解している。<br>(29%)         | 三角関数の性質や加法定理を理解できていない。<br>(0%)    |

#### ○生徒の主な感想

- ・前提条件を疑うまではいかなかったが、疑うということは心がけられた。常識を疑うことの大切さは数学でも言えるんだと感じて感激した。
- ・三人寄れば文殊の知恵というが、本当だなと思った。数人で考えることで、思考のスピードが早まる感じがする。範囲を決める大切さ。深く問題に向き合える人間になりたいです。
- ・何がどう間違えているのかをさかのぼって考えるのが難しかった。そもそもの条件を疑うというのを聞いて、その考え方もあるのか！と思った。もっと頭をやわらかくしたい。
- ・□□君すばらしい！「条件を疑え」って名言ですね！
- ・疑うことが大事ですね。ひねくれている人の方が得意だと思いました。
- ・数学の出題っていいわ。ひねくれ者じゃないとわからない。「条件を疑ってみる」それくらいの態度じゃないと数学解けないなんて、一生得意になれません。数学ムズカシイです…。
- ・どんな問題に対しても条件に気をつけて解いていこうと思えた授業でした。
- ・ここまで「問題」について、深く考えたことがないので、とても頭を使いました。
- ・三角関数は公式を覚えていればだいたいできると思っていたから、今回の問題の考え方は全く思いつかなかった。
- ・考えた内容をグループ内でシェアすることができた。けれども理解するまでには至らなかった。

① 2点 A (−3), B (5) について次の間に答えよ。

(1) ABの2点間の距離

・「2点間の距離は2乗で解く」と覚えていた。

(2) 1 : 2 に内分する点 Cの座標

・  $\frac{8}{3}$  にした。内分の公式が使えていない。 ・ 分子を 8 にした。

(3) 3 : 4 に外分する点 Eの座標

・ 外分ができない。点Eの位置がわからなかった。

・ 外分の公式を間違えていた。  $\frac{-ma+nb}{m-n} \rightarrow m$  と  $n$  が逆にな

(4) ABの中点Mの座標

※特に記述なし

② 3点 A (1, 1), B (−2, −3), C (5, −2) について次の間に答えよ。

(1) BCの2点間の距離を求めよ。

・ 三平方の定理を使って出すことを忘れていた。

(2) 線分ABを2 : 1に内分する点Dを求めよ。

・  $\left(-1, -\frac{5}{3}\right)$  の後ろの ) をつけ忘れた。

(3) 線分ABを3:1に外分する点Eを求めよ。

・ y座標を求めるのに、 $-1 \cdot 1 = -2$  としていた。

・ x座標を求めて安心して、y座標を求めるのを忘れた。

(4) 3点を頂点とする三角形の重心Gを求めよ。

※特に記述なし

(5) x軸上の点で、2点B、Cから等距離にある点Fを求めよ。

・ x軸上の点、を無視していた。

・ 求める点をP (x, 0) としていなかった。

・ AP=BPから  $AP^2=BP^2$  の流れにもっていけないかった。

(6) 点Aに関して点Cと対称な点Hを求めよ。

・  $1 = \frac{x+5}{2}$  の+を−にしていた。

・ 問題の意味を理解できていなかった。

・ 点AがCHの中点と考えていなかった。

(7) 点Bと  $3x-4y=1$  との距離を求めよ。

・  $d = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$  を覚えていなかった。

・ 点Aとの距離を求めた。

(8) 円  $x^2+y^2=13$  上の点(−2, −3)における接線の方程式を求めよ。

・  $x_1x+y_1y=r^2$  を忘れていた。

(9) 3点を頂点とする △ABC は、どのような三角形になるか。記述しなさい。

・ AB=CAを示していなかった。

・  $AB^2=25$ ,  $CA^2=25$ を誤って  $AB^2=5$ ,  $CA^2=5$ と記した。

・  $AB^2+CA^2=BC^2$  から  $\angle A=90^\circ$ だとわからなかった。

③ 次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

(1) 点 (−2, 3) を通り、傾きが 2

※特に記述なし

(2) A (−4, 3), B (6, −3) を通る

・  $y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$  の左辺と右辺の ( ) の部分の代入

をAではなくてBで代入していた。

(3) 点 (4, 6) を通り、x軸に垂直

※特に記述なし

(4) 点 (−2, 3) を通り、直線  $3x-5y-12=0$  に垂直な直線

・ 垂直  $m_1m_2=-1$  で傾きを出せなかった。

④ 次のような円の方程式を求めよ。

(1) 中心が原点、半径が 5

※特に記述なし

(2) 点 (−2, 1) を中心とし、点 (1, −3) を通る。

・  $(x+2)^2+(y-1)^2$  までは求められている。なぜ「= 2 5」?

(3) 直径の両端が (4, −2), (−6, −2)

・ 中点x座標を、計算ミスして1にした。

・ 円の中心の y座標を  $\frac{-2+2}{2}$  と計算していた。

・ 計算ミス。1度図を書くべきだった。

・ 中心の求め方がわからなかった。

(4) 中心が (3, 4) で x軸に接する。

・ x軸に接しているから  $x=3$  だと思った。

・ x軸ではなく y軸に接してしまった。

・ x軸に接するのに x座標で計算していた。

⑤ 次の方程式はどのような図形を表すか。

(1)  $x^2+y^2-2x+4y=0$

※特に記述なし

(2)  $x^2+y^2-\sqrt{3}x+y+1=0$

・ 座標は出せたけど、点は図形なのかどうかわからなくて、「存在しない」って書いた。

・ 半径が0になったので、図形はないと思った。座標も出ていたのに…。表す図形がないのはマイナスの時だと心に刻みます。

・  $\sqrt{\quad}$  の計算が面倒そうだからやらなかった。あとからやったらできました。

⑥ 次のような点 P の軌跡を求めよ。

(1) 2 点 A (−3, 0), B (1, 0) からの距離の比が 1 : 3 である点 P

- ・ 逆についての表記がない。※多数
- ・ 軌跡を理解していない。
- ・ 平方完成で  $\frac{49}{4} - 10 = \frac{39}{4}$  と計算していた。
- ・ 軌跡が直線になると思っていた。
- ・  $3AP = BP$  から  $9AP^2 = BP^2$  にするのを忘れていた。
- ・  $BP^2 = 9AP^2$  への代入のときに計算を間違えた。
- ・ 軌跡なのに方程式のまま答えた。
- ・  $AP:BP=1:3$  を  $3:1$  にしていた。

(2) 2 点 A (− $\sqrt{2}$ , 0), B ( $\sqrt{2}$ , 0) に対して,  $AP^2 + BP^2 = 20$  である点 P

- ・ 逆についての表記がない。※多数
- ・  $(x - \sqrt{2})^2$  を展開するときに、 $x^2 - 2\sqrt{2}x - 2$  になっていた。ここがあっていれば後もあっていた…。
- ・ 点 P を求めるから、半径を求めても意味がないと思い込んでいた。

⑦ 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)  $y > 3x + 2$

- ・  $y < 3x + 2$  の領域を示した。
- ・ 「境界線を含まない」を書き忘れた。
- ・ 「図の斜線部分」の記述がなかった。

(2) 
$$\begin{cases} 2y - 3x > 6 \\ x^2 + y^2 < 9 \end{cases}$$

- ・ 「境界線を含まない」を書き忘れた。
- ・ 「図の斜線部分」の記述がなかった。
- ・ 不等号の向きを逆に考えていた。
- ・  $2y - 3x = 6$  の切片が 6 だと思っていた。
- ・  $x^2 + y^2 = 9$  の中心を (1, 1) だと思い込んでいた。

⑧ 2 直線  $x + 2y - 10 = 0$ ,  $2x + 3y - 7 = 0$  の交点を通り、点 (5, 6) を通る直線の方程式を求めよ。

- ・ 移項ミス
- ・ k を計算ミスしてしまった。k = −3 を k = 3 とかいてしまった。
- ・ k = ~ を求めて、そこからどうするのかが分からなかった。
- ・  $k(x + 2y - 10) + (2x + 3y - 7) = 0$  をつくるということがわかっていなかった。

⑨ 中心が C (4, −3) で、円  $x^2 + y^2 = 4$  が内接する円の方程式を求めよ。

- ・ 2 つの円が内接する条件を間違えた。 ×  $r + r' = d$   
○  $r - r' = d$
- ・ “内接する”を“内部にある”と勘違いしていた。
- ・ d の求め方や r との関係がわからなかった。

⑩ 直線  $3x - y + 1 = 0$  上の点で、2 点 A (4, −5), B (2, −3) から等距離にある点の座標を求めよ。

- ・  $P(x, 3x + 1)$  を求める点としたとき、 $AP^2 = (x - 4)^2 + \{(3x + 1) - (-5)\}^2$  と書くところを  $AP^2 = (x - 4)^2 + \{(3x + 1) + (-5)\}^2$  と書いた。
- ・  $P(x, 3x + 1)$  とおいてしまっていた。
- ・ 連立して解いていない。  $P(a, b)$  とした方が一気に座標を出せた。
- ・  $AP^2 = BP^2$  を出したのはよかったが、そこで計算ミスをしてしまい、 $a - b - 7 = 0$  の式が間違っていた。
- ・ わからないまま放置していた問題だった。
- ・ 直線  $3x - y + 1 = 0$  “上”の点だと読み取れていなかった。
- ・  $3p - q + 1 = 0$  という式が出てこなかった。

⑪ ※「解き方を忘れた。」「計算ミス」「そもそも分かっていない。」  
「なぜ違うかわからない。」などの回答も多く見られた。

# SGH 後継事業「地域との協働による高等学校教育改革推進事業（グローバル型）」 数学の学びを生かそう！

説得力のある探究活動をするためには、**根拠となるデータを示す**ことが重要です！

## ●5W1H（①When, ②Where, ③Who, ④What, ⑤How）を明らかにしよう！▼▼▼▼▼▼▼▼▼▼

例：NHKは参議院選挙を前に①7月13日から3日間、②全国の③18歳以上の男女を対象に⑥コン  
ピューターで無作為に発生させた固定電話と携帯電話の番号に電話をかける「RDD」という方法  
で④内閣支持率の世論調査を行いました。※NHK ホームページより引用、一部改編

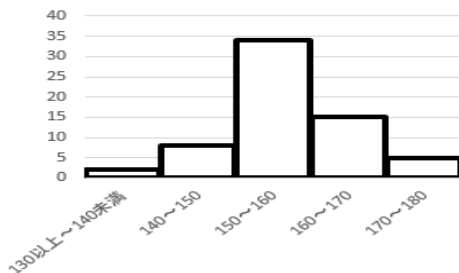
## ●資料を整理し、表現する方法として、学んだことを振り返ろう！▼▼▼▼▼▼▼▼▼▼

【1回生】

- ・度数分布表

| 身長(cm)      | 度数(人) | 相対度数 |
|-------------|-------|------|
| 130以上～140未満 | 2     | 0.03 |
| 140～150     | 8     | 0.13 |
| 150～160     | 34    | 0.53 |
| 160～170     | 15    | 0.23 |
| 170～180     | 5     | 0.08 |
| 計           | 64    | 1    |

- ・ヒストグラム、度数分布多角形



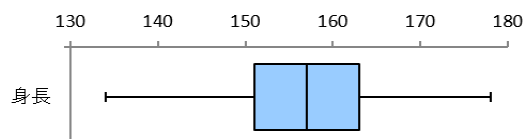
- ・相対度数
- ・代表値（平均値、中央値、最頻値）
- ・範囲

【3回生】

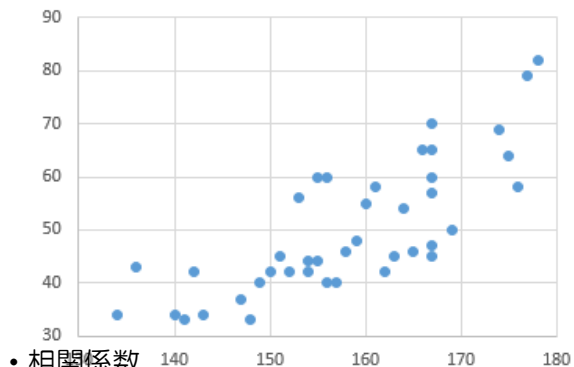
- ・全数調査、標本調査

【4回生 数学Ⅰ】

- ・四分位数、四分位範囲、四分位偏差
- ・箱ひげ図



- ・分散、標準偏差
- ・散布図



- ・相関係数
- ・相関表

## ●表計算ソフトを活用しよう！▼▼▼▼▼▼▼▼▼▼

- ・上記の図は、簡単に作成できます。

②「挿入」を選択

③「グラフ」を選択

①必要なデータを選択

- ・関数の式を入力すると、平均値や相関係数などを自動で計算してくれます。

②「fx」を選択

③関数を選択

①必要なデータを選択

※よく使われる関数には次のようなものがあります  
SUM：合計，AVERAGE：平均値，VARP：分散，  
STEVP：標準偏差，CORREL：相関係数 など

## ボッセル高校との数学交流

アメリカ合衆国ワシントン州にあるボッセル（Bothell）高校は、本校の姉妹校である。本校 5 回生（高校 2 年生相当）が全員参加する、10 月のアメリカとカナダへの海外見学旅行では、ホームステイ先としてお世話になり、バディ生徒とともにボッセル高校の授業にも参加させていただいている。また、ボッセル高校からも、毎年、希望者が、本校生徒の家庭にホームステイし、バディ生徒とともに、本校の授業に参加している。

今年度は、6 月 27 日（木）～7 月 1 日（月）の日程で、6 名の生徒が来校し、6 月 28 日（金）の 5 回生の数学Ⅱの授業にボッセル高校の生徒が 3 名参加したことから、特設授業として数学交流を実施した。

### 【授業の様子】



①左の女子生徒は本校の制服を着ていますが、ボッセル高校の生徒です。直角二等辺三角形の斜辺の長さを求める問題を作成しましたが、「簡単すぎ」と言われています。右の本校生徒は二重根号の問題を作成しました。



②交換して解いています。二重根号は学習していないようで、本校生徒が教えながら解いています。直角三角形の斜辺を求める問題は、直角をはさむ2辺の長さが5と5.3となり、「開平法」を使うよう言われ、苦戦しています。

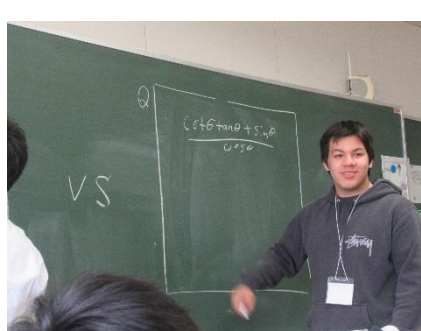


③試合前（？）の握手。

左下へ



④ボッセル高校生徒は  $y = -\cos \theta$  のグラフ、本校生徒は2次関数  $y = x^2 - 8x + 15$  と  $y = ax^2$  のグラフが異なる2個の実数解を持つときの  $a$  の範囲を出題し、解いています。



⑤ボッセル高校の生徒が、 $\cot \theta$  を使った問題を作ろうとしましたが、本校生徒がざわざわしたので振り返っています。私たち、コタンジェント、知らないのです…。



⑥グループごとに、相談しながら、問題を解決しました。



⑦楽しく交流できました！

## オープンスクールでの4回生アシスタントティーチャーの取組

### 1 概要

小学校6年生を対象にした本校のオープンスクールへ参加してくれる児童へ、4回生（高校1年生相当）がアシスタントティーチャーとして指導する。

### 2 ねらい

4回生に、本時の目標や児童への気づかせ方を考えさせることで、本校生徒に身に付けさせたい能力である探究心（関心・意欲、問題発見力）や調整力（共感的態度、意見交換・調整力）を育む。

### 3 第1回オープンスクール

（1）日 時 令和元年7月20日（土）

（2）生 徒 4回生4名

（3）上記生徒との事前模擬授業後の討議

- ・最後まで解けなくて悔しかった。
- ・手を動かして図形を並び替えるのは面白かった。
- ・「なぜ面積が減ったのか」を考えるのが難しかった。2人では少ないので、グループの人数を増やせばよい。→ 本番は個人で考える→4人で考えるという展開にした。
- ・傾きが違うことがよくわかる図を用意した方がいゝ→本番では用意した。



（4）上記生徒とのオープンスクール授業後の討議

- ・前半の並び替える作業が想像以上に早かった。しかしそこでできた時間を使っても、最後の問題が解くのは難しかったようだ。
- ・色んな図形の面積を出そうと頑張っている児童が多く、傾きの違いに気づく児童は少なかった。三角形を重ねるなど、図形を動かすことに焦点を当てればよかったかもしれない。
- ・小学生は、お互いに初対面なので、話し合う前に自己紹介の時間を取ればよかった。2回目からは自己紹介の時間を取り、話し合いが活発になった気がする。できればアイスブレイクを入れればさらにやりとりが活発になったかもしれない。
- ・ワークシートにすぐ書ける児童と、考えをまとめてからでないと書き始められない児童がいるので、「間違えてもいい」という空気を作ることが大切。積極的な子は、ワークシートがびっしりだったが、完璧主義だと進まない。
- ・どこまで言えばいいのか、わからなかった。言い過ぎると答えになってしまう。

### 4 第2回オープンスクール

（1）日 時 令和元年9月21日（土）

（2）生 徒 4回生4名

（3）上記生徒への事前模擬授業後の討議

- ・小学生から出やすいのは、 $2^{\square}-1$ の形ではなく、 $(1\text{つ前の数}) \times 2-1$ ではないか。
- ・2, 4, 8, 16と増えていく方が見つけやすいと思う。

（4）上記生徒とのオープンスクール授業後の討議

- ・ $\square \times 2 + 1$ が奇数になるということを教えることができた。
- ・1枚目をどこに置くか、置く場所だけ教えた後にはできていた。どちらに置けばよいのかがポイントだった。円盤の枚数が、「奇数のときは中央に置き、偶数のときは端に置く」と書いていた子がいて、すごいと思った。
- ・最後まで、動かし方がわからない子がいたので一緒にやった。それではできたことにならないので、自分でもう1回やってみようかと声をかけた。
- ・どう移動させるかを、どのような言葉で教えるか、ヒントを与えすぎてもいけないし、難しかった。
- ・数え間違えている子には、一緒に数えてあげると、間違えにくいようだった。



# 数学科 <オープンスクール> 学習指導案

令和元年7月20日（土）

小学生対象（30分） 授業者 林 大輔

## 1 本授業で重視した授業改善の視点

| ■「主体的・対話的で深い学び」との関連 |                                                                      |
|---------------------|----------------------------------------------------------------------|
| 対話的な学び              | 仲間や教員と、意見交換したり、議論したりすることで新たな考えに気づいたり、自らの考えをより妥当なものとしたりすることができる。【E F】 |
| 深い学び                | 課題の追及、課題の解決を行う探究の過程で、論理的に考えたり、新たな問いを見いだしたりすることができる。【D】               |

## 2 本時の目標

- ・実際に手を動かして仲間と協力しながら課題を粘り強く考え、答えを導こうとする。【関心・意欲・態度】
- ・分けて合わせると面積が減る理由を理解し、説明することができる。【数学的な見方・考え方】

## 3 本時の展開

| 過程          | 主な学習活動                                                                                                                                            | 教師の主な働きかけ                                                                                                                                                              | ■評価規準 □評価方法<br>▲支援の手立て ※留意点                                                                                                                                                                                      |
|-------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 導入<br>(5分)  | ○自己紹介<br>○ワークシートの説明<br>○ループリリックの確認                                                                                                                | ・AKBループリリックやワークシートの説明をする。                                                                                                                                              | ※インタラクティブボードとパワーポイントの準備をしておく。<br>※タッチペンのキャリブレーションも行っておく。<br>※机は2～3人のグループになるように配置し、それぞれのグループに台紙と4つのパーツとなる図形を置いておく。<br>▲授業の目標を理解させる。                                                                               |
| 展開<br>(20分) | ○スライド見ながら、課題を理解する。<br><br>○2～3人の仲間と協力しながらパーツを組み合わせて面積が減った図を完成させる。<br>○なぜ面積が減ったのかを、まず1人で考える。その後3～4人グループを作ってグループで考える。<br>○代表グループが斜辺に注目し、傾きの違いを発表する。 | ・パワーポイントのスライドを進めて、図形の配置の仕方面で面積が減る（ように見える）ことを理解させる。<br>・手元の図形で面積が減った図を完成させる。<br>・ボードで解答を見せる。<br>・なぜ面積が減っているのかをまずは個人で考えさせる。<br><br>・グループで考え、お互いの意見を出し合い、議論する。<br>・発表させる。 | ▲考えるのが難しそうなグループにはヒントを示す。<br><br>■実際に手を動かして仲間と協力しながら課題を粘り強く考え、答えを導こうとする。【関】<br><br>▲なかなか三角形の斜辺に注目しない場合は、ヒントのスライドを見せる。<br>▲「傾き」や「急さ」「角度」などの言葉が出たら、「台紙のマスを使ってそれを表せるか」と問いかける。<br>■分けて合わせると面積が減る理由を理解し、説明することができる。【考】 |
| まとめ<br>(5分) | ○本時のまとめ<br>○ループリリックによる自己評価                                                                                                                        | ・傾きは縦の長さ/横の長さで表されること<br>・見た目にだまされずに、自分の手を動かしてやってみること等をスライドでまとめる。                                                                                                       | □ループリリック                                                                                                                                                                                                         |

### 【Rubric】

| 評価   | A                                | B                            | C                             |
|------|----------------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| 深い学び | 分けて合わせると面積が減った理由を理解し、説明することができる。 | 分けて合わせると面積が減った理由を理解することができる。 | 分けて合わせると面積が減った理由を理解することができない。 |

# 数学科 <オープンスクール> 学習指導案

令和元年9月21日（土）

小学生対象（30分） 授業者 林 大輔

## 1 本授業で重視した授業改善の視点

| ■「主体的・対話的で深い学び」との関連 |                                                                      |
|---------------------|----------------------------------------------------------------------|
| 対話的な学び              | 仲間や教員と、意見交換したり、議論したりすることで新たな考えに気づいたり、自らの考えをより妥当なものとしたりすることができる。【E F】 |
| 深い学び                | 課題の追及、課題の解決を行う探究の過程で、論理的に考えたり、新たな問いを見いだしたりすることができる。【D】               |

## 2 本時の目標

- ・仲間と協力しながら課題を粘り強く考え、答えを導こうとする。【関心・意欲・態度】
- ・具体的な試行から法則を導き、相手に説明することができる。【数学的な見方・考え方】

## 3 本時の展開

| 過程          | 主な学習活動                                                                                                                                                           | 教師の主な働きかけ                                                                                                                                                 | ■評価規準 □評価方法<br>▲支援の手立て ※留意点                                                                                                                          |
|-------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 導入<br>(5分)  | ○自己紹介<br>○ワークシートの説明<br>○ループリックの確認                                                                                                                                | ・AKBループリックやワークシートの説明をする。                                                                                                                                  | ※インタラクティブボードとパワーポイントの準備をしておく。<br>※タッチペンのキャリブレーションも行っておく。<br>※机は2～3人のグループになるように配置し、机の上にワークシートとハノイの塔を置いておく。<br>▲授業の目標を理解させる。                           |
| 展開<br>(20分) | ○スライド、ワークシートを見ながら、ルール、課題を理解する。<br>○個人で手元のプリントを使って1～4枚を移動させる。<br>○グループで課題を考える。<br>○代表者がインタラクティブボードで3枚、4枚の場合を発表する。<br>○ワークシートの表を埋める。<br>○法則を個人→グループで考える。<br>○発表する。 | ・円盤を移動させるルールを説明する。<br>・手元のプリントで円盤が1～4枚の場合をまずは個人でやらせる。回数はワークシートに書かせる。<br>・3～4枚で悩んでいる人が出てきたら、グループで考えるよう指示する。<br>・ワークシートの表を埋めさせ、法則を個人→グループで考えさせる。<br>・発表を促す。 | ▲横から見た図と上から見た図の2種類を用意し、どの児童にとってもわかりやすくする。<br>▲1枚ずつボードでやってもらい、やり方を確認しながら進める。<br>■仲間と協力しながら課題を粘り強く考え、答えを導こうとする。【関】<br>■具体的な試行から法則を導き、相手に説明することができる。【考】 |
| まとめ<br>(5分) | ○本時のまとめ<br>○ループリックによる自己評価                                                                                                                                        | ・3種類の規則があるが、児童から出る意見に合わせてまとめ方を変えていく。<br>・ループリックを記入させる。                                                                                                    | □ループリック                                                                                                                                              |

### 【Rubric】

| 評価   | A                                    | B                         | C                          |
|------|--------------------------------------|---------------------------|----------------------------|
| 深い学び | 4枚の円盤を移動させることができ、そこから規則を導いて相手に説明できる。 | 4枚の円盤をルールに沿って移動させることができる。 | 4枚の円盤をルールに沿って移動させることができない。 |

# 平成31年度全国学力学習状況調査〔数学〕の分析と課題

○成果 全ての問題で正答率が全国平均を上回った。(昨年度は1問、全国平均を下回った。)

正答率が全国平均を大きく上回った問題

- ④ 下の表は、 $y$  が  $x$  に反比例する関係を表したものです。 $y$  を  $x$  の式で表しなさい。

(本校正答率 78.4/全国正答率 48.9)

|     |     |    |    |    |               |    |    |    |     |
|-----|-----|----|----|----|---------------|----|----|----|-----|
| $x$ | ... | -3 | -2 | -1 | 0             | 1  | 2  | 3  | ... |
| $y$ | ... | 2  | 3  | 6  | $\frac{0}{0}$ | -6 | -3 | -2 | ... |

1 回生 (中学1 年相当) で、 $y=6/x$  と  $y=x/6$  の違いについて説明させる授業を展開しており、違いがわかる生徒が多かったのではないかと思います。

- ⑧ (1)

(本校正答率 87.8/全国正答率 57.9)

| 最近 1 か月間に読んだ本の冊数 |    |     |    |    |    |   |   |   |   |   |    |     |
|------------------|----|-----|----|----|----|---|---|---|---|---|----|-----|
| 読んだ本の冊数(冊)       | 0  | 1   | 2  | 3  | 4  | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 計   |
| 人数(人)            | 13 | 114 | 74 | 30 | 11 | 7 | 4 | 4 | 3 | 4 | 6  | 270 |

全国では、最頻値を「最も高い度数」の「114」とする生徒が多かったが、本校にはいなかった。授業で、このような間違えについて学習した成果だと思われます。

●課題 全ての問題で正答率が全国平均を上回ったが、正答率にあまり差がなかった問題

(本校正答率 75.7/全国正答率 62.2)

- ①  $a$  と  $b$  が正の整数のとき、下のアからエまでの計算のうち、計算の結果が正の整数にならないことがあるものはどれですか。正しいものをすべて選びなさい。

文字に具体的な数を代入する経験が必要です。授業で具体的な数の代入を意識して取り組ませる必要があります。

ア  $a + b$

イ  $a - b$

ウ  $a \times b$

エ  $a \div b$

## 取り組ませる問題

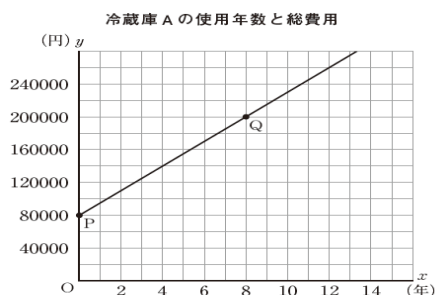
$a$  と  $b$  が正の整数のとき、次の計算の結果が正の整数になるとは限らないものを選び、正の整数にならない例をあげなさい。

- (1)  $a + b$  (2)  $a - b$   
(3)  $a \times b$  (4)  $a \div b$

- ⑥ (1)

- (1) 冷蔵庫Aを購入して  $x$  年間使用するときの総費用を  $y$  円とします。この  $x$  と  $y$  の関係を、健太さんは次のような一次関数のグラフに表しました。

(本校正答率 45.9/全国正答率 38.8)



このグラフにおける  $x$  座標が 0 である点を P、 $x$  座標が 8 である点を Q とします。点 P の  $y$  座標と点 Q の  $y$  座標の差は、冷蔵庫Aについての何を表していますか。下のアからオまでのの中から正しいものを 1 つ選びなさい。

- ア 本体価格  
イ 使用年数  
ウ 1 年間あたりの電気代  
エ 購入してから 8 年間の電気代  
オ 購入して 8 年間使用するときの総費用

正答率が半分を下回りました。誤答例を見ると、 $y$  切片である本体価格も合わせた解答をしてしまった生徒が多いようです。グラフを読み取る力が足りないことが原因だと考えられます。傾きが 1 年間あたりの電気代であること、 $y$  切片が使用年数に関係なくかかる本体価格を表していることを理解している必要があります。授業においてはこのような実生活に即した問題設定の中で、表・グラフ・式を活用して解決する経験をしていくことが求められています。

## 取り組ませる問題

- (1) 点Pは何を表していますか。  
(2) 点Qは何を表していますか。  
(3) 半直線PQの傾きは何を表していますか。

- (2) 健太さんの家では、7ページの健太さんが作った表で、容量が500 Lである冷蔵庫Bと冷蔵庫Cのどちらかを購入することになりました。そこで、健太さんとお姉さんは、冷蔵庫を購入して $x$ 年間使用するときの総費用を $y$ 円として、冷蔵庫Bと冷蔵庫Cの総費用を比べてみることにしました。

健太さん「本体価格は冷蔵庫Cの方が高いので、最初のうちは冷蔵庫Bより冷蔵庫Cの方が総費用が多いね。」  
お姉さん「1年間あたりの電気代は冷蔵庫Cの方が安いので、使い続けると冷蔵庫Bより冷蔵庫Cの方が総費用が少なくなるね。」  
健太さん「それなら、2つの冷蔵庫の総費用が等しくなるときがあるね。」

冷蔵庫Bと冷蔵庫Cの総費用が等しくなるおよその使用年数を考えます。下のア、イのどちらかを選び、それを用いて冷蔵庫Bと冷蔵庫Cの総費用が等しくなる使用年数を求める方法を説明しなさい。ア、イのどちらを選んで説明してもかまいません。

ア それぞれの冷蔵庫の使用年数と総費用の関係を表す式

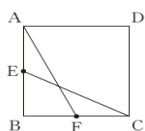
イ それぞれの冷蔵庫の使用年数と総費用の関係を表すグラフ

7

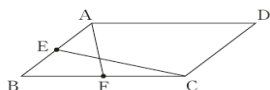
- (3) 真由さんは、これまでに調べたことを、次のようにまとめました。

まとめ

◎「正方形ABCDの辺ABの中点をE、辺BCの中点をFとすると、 $AF = CE$ になる。」ということが成り立つ。



◎「平行四辺形ABCDの辺ABの中点をE、辺BCの中点をFとすると、 $AF = CE$ になる。」ということが成り立たない。



上のまとめから、「四角形ABCDが正方形ならば、 $AF = CE$ になる。」ということが成り立つことと、「四角形ABCDが平行四辺形ならば、 $AF = CE$ になる。」ということが成り立たないことがわかります。

正方形でない四角形で、 $AF = CE$ になる四角形ABCDを考えます。四角形ABCDがどんな四角形ならば、 $AF = CE$ になりますか。「ならば、……になる。」という形で書きなさい。

8

前ページの図書だよりの下書きには、わかったこととして次のことが書かれています。

- 平日は、270人の半数以上の生徒の読書時間が20分以上です。  
○ 休日は、270人の半数以上の生徒の読書時間が0分です。

このことは、図書だよりの下書きにある平日1日あたりの読書時間と休日1日あたりの読書時間の、ある値に着目することでわかります。その値が、下のアからオまでの中にあります。それを1つ選びなさい。

ア 平均値

イ 中央値

ウ 最頻値

エ 最大値

オ 最小値

(本校正答率 50.0/全国正答率 34.7)

半数が間違えた問題です。さらに、全問題の中で空欄が最も多かった問題です。グラフの知識はあり、式を立てる力もありますが、それらを活用して与えられた課題を解決する道筋がイメージできていないことが原因だと思います。表・グラフ・式を駆使して課題を解決する経験を授業において積極的にさせていく必要があります。

### 取り組ませる問題

上の問題を読んで次の問いに答えなさい。

(1) 冷蔵庫B、Cの $x$ と $y$ の対応表・グラフ・式をそれぞれ書きなさい。

(2) 使用年数に応じて冷蔵庫B、Cのどちらを購入する方が得か、(1)を使って説明しなさい。

(本校正答率 67.6/全国正答率 53.3)

誤答例を見ると、仮定や結論の書き方が不十分なものが多く見られました。2回生の「証明」で、論理の立て方を丁寧に指導する必要があります。また、問題設定として「条件を変えて考える」という思考の流れでしたが、与えられた問題から発展させて考えるという経験が必要です。授業の中で「条件を変えたら結論がどうなるか」を考える機会を増やしていきます。

### 取り組ませる問題

平行四辺形、台形、ひし形、長方形、正方形の5つの四角形で、仮定と結論を明確にしてそれぞれの性質を1つずつ述べなさい。

例：[仮定] 平行四辺形ならば、[結論] 2組の対辺はそれぞれ平行である

(本校正答率 68.9/全国正答率 53.6)

中央値の求め方はわかっているものの、「中央値より小さい値が半数、大きい値が半数の分布がある」ということが理解できておらず、課題解決のために活用できていないということではないでしょうか。授業において知識を活用する問題を解く必要があります。

### 取り組ませる問題

上の問題で、「平日1日あたりの読書時間」と「休日1日あたりの読書時間」について比較・分析(グラフから何が言えるかを考える)しなさい。ただし、「平均値」「中央値」「最頻値」「最大値」という言葉を全て使うこと。